Vereinfachtes Konvergenzkriterium

Man beweise die folgende Modifikation der Konvergenzbedingung für Riemannsche Zwischensummen:

$$(1) \qquad \exists \lim \sigma(Z,T) = A \quad \text{gdw.} \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists Z_0 \, \forall T : |\sigma(Z_0,T) - A| < \varepsilon;$$

die Zwischenpunktsysteme T sind natürlich zu Z_0 zu bilden.

Verbal bedeutet die Aussage, dass es für den Nachweis der Existenz des Integrals genügt, nur eine einzige Zerlegung Z_0 zu finden, so dass für jede Wahl von Zwischenpunkten T die Abschätzung in (**??**) gilt.

Hinweis: Man beweise zunächst folgenden Hilfsatz:

Für $E_1, ..., E_N \subset \mathbb{C}$ folgt aus

$$(2) \qquad \forall z_\nu \in E_\nu : \left| \sum_{\nu=1}^{N} z_\nu \right| < \varepsilon.$$

sogar

$$\forall w_\nu \in \operatorname{conv} E_\nu : \left| \sum_{\nu=1}^{N} w_\nu \right| < \varepsilon.$$

Dabei ist

$$\operatorname{conv} E = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, z_i \in E, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

die Menge aller Konvexkombinationen der Punkte $z_1, ..., z_n$.